Solutions des exercices non faits en classe

1. Transformées de Fourier et produit de convolution

Exercice 1. On a
$$\mathcal{F}_y^{\pm} f_2 = \frac{2}{y^2 \pm y + 2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_y^{\pm} f_3 = \frac{2e^{\pm iy}}{1+y^2}$$
si $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{\pi}{8}.$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+\cos(\pi x)}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left((\pi+1)e^{-\pi}+1\right).$

Exercice 6.

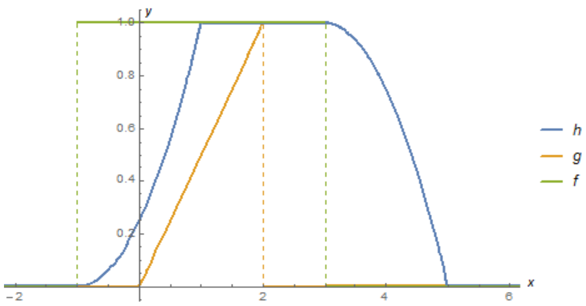
(1) On a $(f * g)(x) = 2x$ si $x \in \mathbb{R}$.

(2) On a $(f * g)(x) = -ex\chi_{[0,+\infty[}(x)$ si $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$h(x) := (f*g)(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5 \\ (x+1)^2/4 \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \quad \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ (-x^2+6x-5)/4 \quad \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

(2) Une représentation des trois fonctions f, g et $h = f * g$ est donnée par



2. Extrema libres et sous contrainte

Exercice 1.

(2) La fonction f_2 n'admet aucun extremum sur son domaine.
(3) La fonction f_3 n'admet aucun extremum sur son domaine.
(6) La fonction f_6 admet des minima globaux non stricts en $(0,0)$ et $(1,1)$.
(7) La fonction f_7 admet un minimum global strict en $(0,1)$.

(8) La fonction f_8 admet des maxima globaux non stricts en les points $(x, \frac{4k+1}{2x}\pi)$ ($x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $k \in \mathbb{Z}$) et des minima globaux non stricts en les points $(x, \frac{4m+3}{2x}\pi)$ ($x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $m \in \mathbb{Z}$).
(9) La fonction f_9 admet un minimum global strict en $(1/2, -1)$.

Exercice 5. cf. correction sur le site de Françoise Bastin.

Exercice 6.

(i) Sur $\mathcal{E}$, f admet des maxima globaux non stricts en les points de coordonnées $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et des minima globaux non stricts en $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

(ii) Sur le disque centré à l'origine et de rayon 3, g admet un minimum global strict en $(0, 0)$ et deux maxima globaux non stricts en $(0, \pm 3)$

3. Géométrie Analytique

Exercice 3.

(a) Les droites d_1 et d_2 sont gauches et leur perpendiculaire commune admet comme équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

(b) La distance entre d_1 et d_2 vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 4.

(a) On a $\Pi \equiv 3x + 2y + z - 6 = 0$.

(b) Les plans orthogonaux à Π et passant par l'origine vérifient une équation cartésienne de la forme $ax + by - (3a + 2b)z = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(c) Le plan Π' recherché admet pour équation cartésienne $2x - y - 4z = 0$.

(d) On a $\mathrm{d}(P, d) = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ et $\mathrm{d}(\Pi', d) = \frac{11\sqrt{21}}{21}$.

Exercice 5.

(a) Des équations paramétriques cartésiennes de d_1 sont (par exemple) données par

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - r \\ y = -2 + r \quad (r \in \mathbb{R}). \\ z = -r \end{cases}$$

(c) Le plan recherché admet pour équation cartésienne $2x + y - z = 0$.
(d) La distance entre l'origine et d_2 vaut 5.

Exercice 7. On a $\Pi \equiv x - z - 3 = 0$.

Exercice 8. La droite symétrique orthogonale par rapport à π de d a pour équations

$$\begin{cases} 5x - 2y - 5 = 0 \\ 4y - 5z + 20 = 0. \end{cases}$$

Exercice 9. Le plan médiateur du segment $[A, B]$ a pour équation $3x - 2y - z - 2 = 0$.

Exercice 10.

(a) Des équations paramétriques de d_1 sont (par exemple) données par

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 2r \\ y = 1 + r \\ z = -3r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

(b) Les droites d_1 et d_2 sont orthogonales, mais non sécantes et non parallèles.

(c) Le plan Π recherché admet pour équation cartésienne $3x + 2z = 0$.

(d) On a $\mathrm{d}(P, \Pi) = \sqrt{13}$.

Exercice 11.

(a) Des équations paramétriques de Π sont (par exemple) données par

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + r + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -r \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

(b) Le plan Π et la droite d sont sécants, non orthogonaux et non parallèles.

(c) Le plan Π_0 recherché admet pour équation cartésienne $x - z + 2 = 0$.

(d) On a $\mathrm{d}(P, \Pi) = \frac{12\sqrt{17}}{17}$.

5. Séries de Fourier

Exercice 5.

(b) On a

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$